Die Poincaré-Vermutung

Dipl.-Math. Bastian Rieck

Arbeitsgruppe Computergraphik und Visualisierung
Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen

3. September 2012

Warum dieser Vortrag?

Mehr als 100 Jahre hatten Mathematiker oft verzweifelt versucht, dieses theoretische Problem zu lösen, das für Laien so gut wie unverständlich ist.

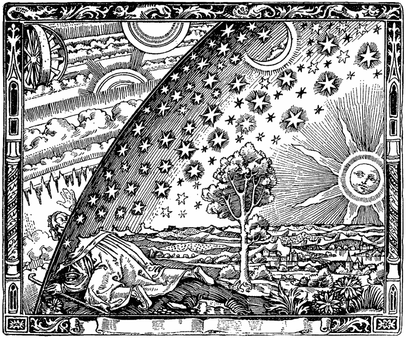
(süddeutsche.de vom 22.12.2006; Original ohne Hervorhebung)

Doch jetzt ist mathematisch beweisbar, dass die vierte Dimension wirklich existiert.

(welt.de vom 12.09.2004)

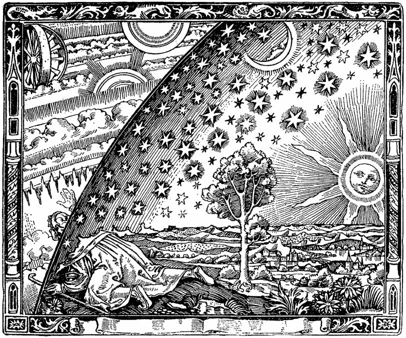
Warum ist die Poincaré-Vermutung wichtig?

Warum ist die Poincaré-Vermutung wichtig?

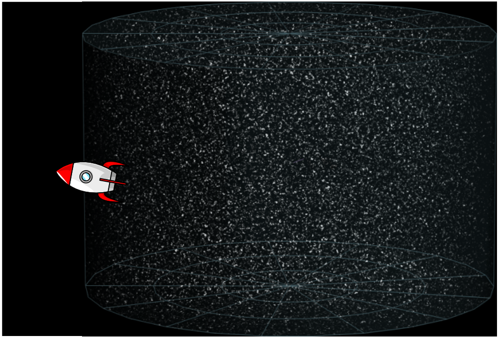


Früher

Warum ist die Poincaré-Vermutung wichtig?



Früher



Heute

Henri Poincaré

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der "École Polytechnique"

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der “École Polytechnique”
- 1879: Abschluss der Promotion

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der “École Polytechnique”
- 1879: Abschluss der Promotion
- Beiträge zur Mathematik (algebraische Geometrie, algebraische Topologie Zahlentheorie), Physik (Optik, Thermodynamik, spezielle Relativitätstheorie) und Philosophie.

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der "École Polytechnique"
- 1879: Abschluss der Promotion
- Beiträge zur Mathematik (algebraische Geometrie, algebraische Topologie Zahlentheorie), Physik (Optik, Thermodynamik, spezielle Relativitätstheorie) und Philosophie.
- Letzter Universalist des 20. Jahrhunderts?

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der “École Polytechnique”
- 1879: Abschluss der Promotion
- Beiträge zur Mathematik (algebraische Geometrie, algebraische Topologie Zahlentheorie), Physik (Optik, Thermodynamik, spezielle Relativitätstheorie) und Philosophie.
- Letzter Universalist des 20. Jahrhunderts?
- 1900: Erste Formulierung der Poincaré-Vermutung

Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der "École Polytechnique"
- 1879: Abschluss der Promotion
- Beiträge zur Mathematik (algebraische Geometrie, algebraische Topologie Zahlentheorie), Physik (Optik, Thermodynamik, spezielle Relativitätstheorie) und Philosophie.
- Letzter Universalist des 20. Jahrhunderts?
- 1900: Erste Formulierung der Poincaré-Vermutung
- 1904: Poincaré findet Fehler in vorherigem Beweis

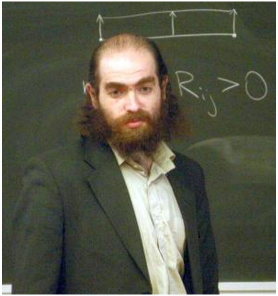
Henri Poincaré

- * 29. April 1854 in Nancy
- † 17. Juli 1912 in Paris
- 1873: Mathematikstudium an der "École Polytechnique"
- 1879: Abschluss der Promotion
- Beiträge zur Mathematik (algebraische Geometrie, algebraische Topologie Zahlentheorie), Physik (Optik, Thermodynamik, spezielle Relativitätstheorie) und Philosophie.
- Letzter Universalist des 20. Jahrhunderts?
- 1900: Erste Formulierung der Poincaré-Vermutung
- 1904: Poincaré findet Fehler in vorherigem Beweis
- 2001: Poincaré-Vermutung wird zu einem der 7 Millennium-Probleme des *Clay Mathematics Institute*.

Grigori Perelman

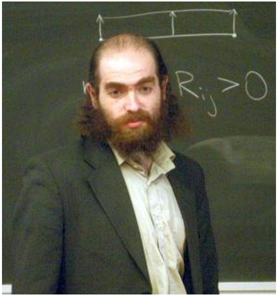
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)



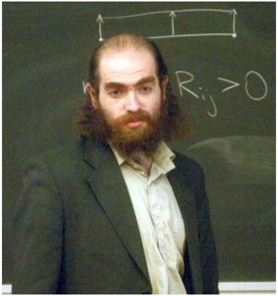
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium



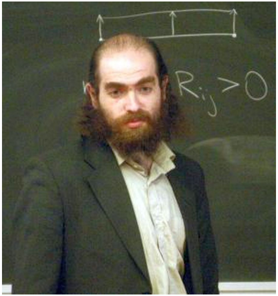
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik



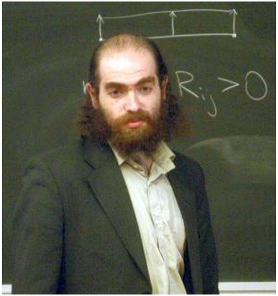
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik
- 2002: Vorläufiger Beweis der Poincaré-Vermutung



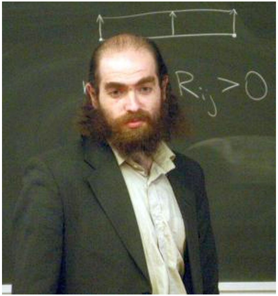
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik
- 2002: Vorläufiger Beweis der Poincaré-Vermutung
- 2003: Weitere erläuternde Publikationen



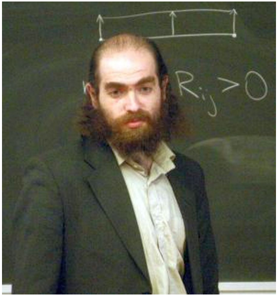
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik
- 2002: Vorläufiger Beweis der Poincaré-Vermutung
- 2003: Weitere erläuternde Publikationen
- 2006: Bestätigung der Korrektheit des Beweises durch andere Mathematiker



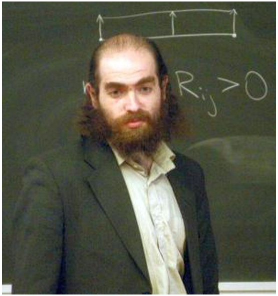
Grigori Perelman

- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik
- 2002: Vorläufiger Beweis der Poincaré-Vermutung
- 2003: Weitere erläuternde Publikationen
- 2006: Bestätigung der Korrektheit des Beweises durch andere Mathematiker
- 2006: Perelman lehnt Fields-Medaille ab



Grigori Perelman

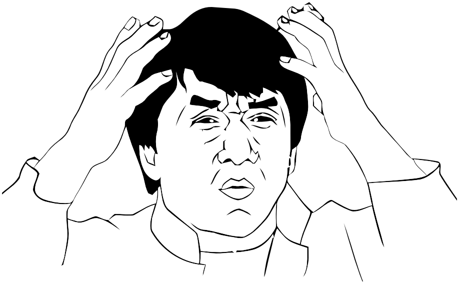
- * 13. Juni 1966 in Leningrad (St. Petersburg)
- 1982: Perfekte Punktzahl bei internationaler Mathematik-Olympiade und Zulassung zum Studium
- 1990: Promotion in Mathematik
- 2002: Vorläufiger Beweis der Poincaré-Vermutung
- 2003: Weitere erläuternde Publikationen
- 2006: Bestätigung der Korrektheit des Beweises durch andere Mathematiker
- 2006: Perelman lehnt Fields-Medaille ab
- 2010: Perelman lehnt Millenniumspreis ab



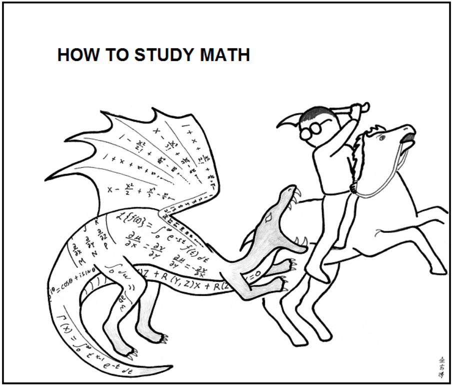
```
   Date: Wed, 20 Nov 2002 11:46:49 +0300 (MSK)
   From: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
Reply-To: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
 Subject: Re: geometrization
     To: Vitali Kapovitch <vitali@math.ucsb.edu>

That’s correct.
Grisha

On Tue, 19 Nov 2002, Vitali Kapovitch wrote:

> Hi Grisha,
> Sorry to bother you but a lot of people are asking me about your preprint
> "The entropy formula for the Ricci...". Do I understand it correctly
> that while you can not yet do all the steps in the Hamilton program
> you can do enough so that using some collapsing results you can prove
> geometrization?
> Vitali
>
```

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.



Im Folgenden



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

Bildquelle: abstrusegoose.com

Ganz langsam. . .

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

1-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 1-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 1-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}$) aussieht.

1-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 1-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 1-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}$) aussieht.

- "lokal" stellen wir uns "aus der Sicht eines kleinen Käfers" vor

1-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 1-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 1-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}$) aussieht.

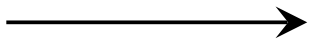
- "lokal" stellen wir uns "aus der Sicht eines kleinen Käfers" vor
- $\mathbb{R}$ ist die Zahlengerade:

1-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 1-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 1-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}$) aussieht.

- “lokal” stellen wir uns “aus der Sicht eines kleinen Käfers” vor
- $\mathbb{R}$ ist die Zahlengerade:



$\mathbb{R}$

1-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 1-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 1-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}$) aussieht.

- "lokal" stellen wir uns "aus der Sicht eines kleinen Käfers" vor
- $\mathbb{R}$ ist die Zahlengerade:

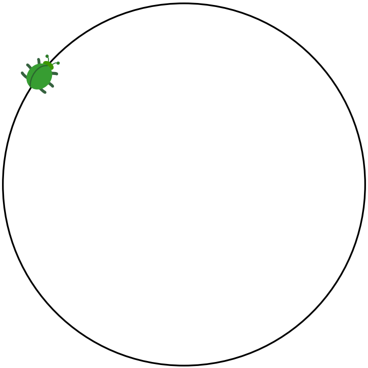
- Aus Sicht eines Käfers: •

Beispiel für eine 1-Mannigfaltigkeit

Die 1-Sphäre

Beispiel für eine 1-Mannigfaltigkeit

Die 1-Sphäre



Achtung

Die 1-Sphäre bezeichnet nur die Kreis*linie*. Der Käfer kann also nicht in das *Innere* des Kreises vordringen.

2-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 2-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 2-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^2$) aussieht.

2-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 2-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 2-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^2$) aussieht.

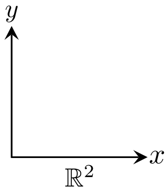
- $\mathbb{R}^2$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit x-Achse und y-Achse:

2-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 2-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 2-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^2$) aussieht.

- $\mathbb{R}^2$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit x-Achse und y-Achse:

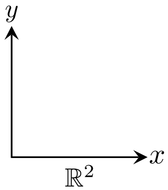


2-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 2-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 2-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^2$) aussieht.

- $\mathbb{R}^2$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit x-Achse und y-Achse:



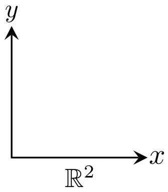
- Aus Sicht des Käfers:

2-Mannigfaltigkeit

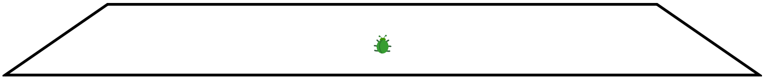
Definition

Eine 2-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die *lokal* wie der 2-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^2$) aussieht.

- $\mathbb{R}^2$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit *x*-Achse und *y*-Achse:



- Aus Sicht des Käfers:



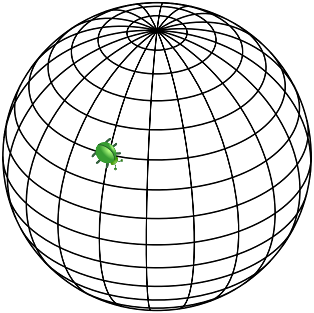
Beispiel für eine 2-Mannigfaltigkeit

Die 2-Sphäre

Bildquelle: Wikipedia

Beispiel für eine 2-Mannigfaltigkeit

Die 2-Sphäre



Achtung

Die 2-Sphäre bezeichnet nur die Kugel*oberfläche*. Der Käfer kann also nicht in das *Innere* der Kugel vordringen.

Bildquelle: Wikipedia

3-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 3-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die lokal wie der 3-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^3$) aussieht.

Bildquelle: Frédéric Michel

3-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 3-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die lokal wie der 3-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^3$) aussieht.

- $\mathbb{R}^3$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit x-Achse, y-Achse und z-Achse:

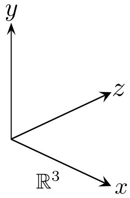
Bildquelle: Frédéric Michel

3-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 3-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die lokal wie der 3-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^3$) aussieht.

- $\mathbb{R}^3$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit x-Achse, y-Achse und z-Achse:



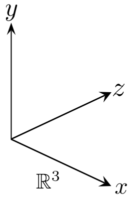
Bildquelle: Frédéric Michel

3-Mannigfaltigkeit

Definition

Eine 3-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die lokal wie der 3-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^3$) aussieht.

- $\mathbb{R}^3$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit *x*-Achse, *y*-Achse und *z*-Achse:



- Aus ~~Sicht des Käfers~~ unserer Sicht:

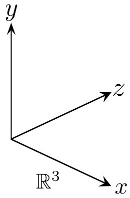
Bildquelle: Frédéric Michel

3-Mannigfaltigkeit

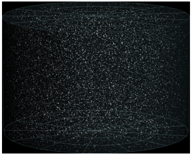
Definition

Eine 3-Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Punkten, die lokal wie der 3-dimensionale euklidische Raum ($\mathbb{R}^3$) aussieht.

- $\mathbb{R}^3$ ist ein kartesisches Koordinatensystem mit *x*-Achse, *y*-Achse und *z*-Achse:



- Aus ~~Sicht des Käfers~~ unserer Sicht:



Bildquelle: Frédéric Michel

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?
- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: “Ja”!

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?
- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: “Ja”!
- Klassischeres Beispiel für 3-Mannigfaltigkeit: Die 3-Sphäre.

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

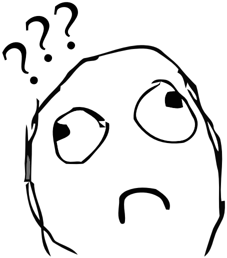
- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?
- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: “Ja”!
- Klassischeres Beispiel für 3-Mannigfaltigkeit: Die 3-Sphäre.
- 3-Sphäre ist die höher-dimensionale Verallgemeinerung einer Kugel.

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?
- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: “Ja”!
- Klassischeres Beispiel für 3-Mannigfaltigkeit: Die 3-Sphäre.
- 3-Sphäre ist die höher-dimensionale Verallgemeinerung einer Kugel.
- Aber nicht mehr zeichenbar...

Beispiele für 3-Mannigfaltigkeiten

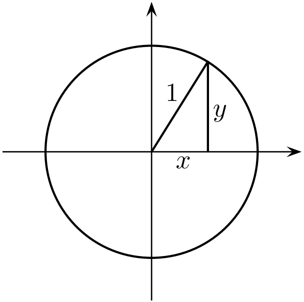
- Unser Universum ist lokal 3-dimensional.
- Ist unser Universum eine 3-Mannigfaltigkeit?
- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: “Ja”!
- Klassischeres Beispiel für 3-Mannigfaltigkeit: Die 3-Sphäre.
- 3-Sphäre ist die höher-dimensionale Verallgemeinerung einer Kugel.
- Aber nicht mehr zeichenbar…



Wie stellen sich Mathematiker die 3-Sphäre vor?

Trick: Beschreibung durch Koordinaten!

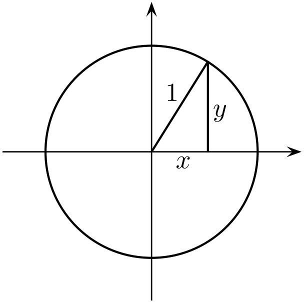
- Die 1-Sphäre enthält alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$.



Wie stellen sich Mathematiker die 3-Sphäre vor?

Trick: Beschreibung durch Koordinaten!

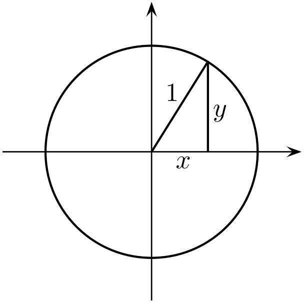
- Die 1-Sphäre enthält alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$.
- Die 2-Sphäre enthält alle Punkte (x, y, z) mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Wie stellen sich Mathematiker die 3-Sphäre vor?

Trick: Beschreibung durch Koordinaten!

- Die 1-Sphäre enthält alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$.
- Die 2-Sphäre enthält alle Punkte (x, y, z) mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- Die 3-Sphäre enthält alle Punkte (x, y, z, w) mit $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.



Zusammenfassung bisher

Zusammenfassung bisher

- Die 1-Sphäre ist eine 1-Mannigfaltigkeit, die im 2-dimensionalen Raum lebt.

Zusammenfassung bisher

- Die 1-Sphäre ist eine 1-Mannigfaltigkeit, die im 2-dimensionalen Raum lebt.
- Die 2-Sphäre ist eine 2-Mannigfaltigkeit, die im 3-dimensionalen Raum lebt.

Zusammenfassung bisher

- Die 1-Sphäre ist eine 1-Mannigfaltigkeit, die im 2-dimensionalen Raum lebt.
- Die 2-Sphäre ist eine 2-Mannigfaltigkeit, die im 3-dimensionalen Raum lebt.
- Die 3-Sphäre ist eine 3-Mannigfaltigkeit, die im 4-dimensionalen Raum lebt.

Zurück zur Vermutung

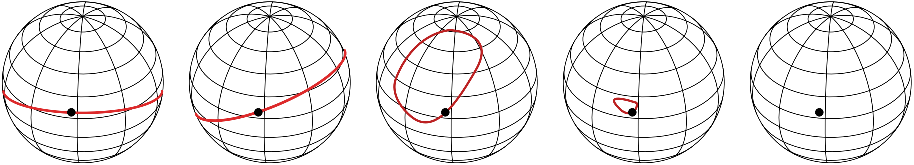
Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Was bedeutet “einfach zusammenhängend”?

Am Beispiel der 2-Sphäre

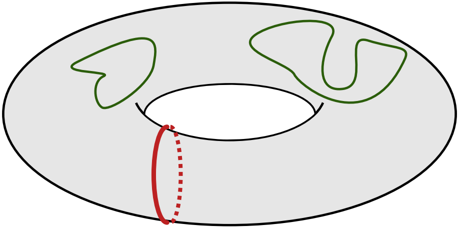
Was bedeutet “einfach zusammenhängend”?

Am Beispiel der 2-Sphäre



Eine Mannigfaltigkeit, die *nicht* einfach zusammenhängend ist

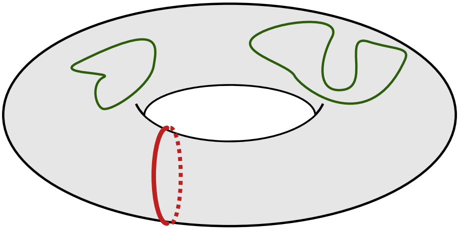
Der Torus ("Fahrradschlauch")



- Die grünen Schleifen lassen sich auf einen Punkt zusammenziehen.

Eine Mannigfaltigkeit, die *nicht* einfach zusammenhängend ist

Der Torus ("Fahrradschlauch")



- Die grünen Schleifen lassen sich auf einen Punkt zusammenziehen.
- Die rote Schleife kann *nicht* zu einem Punkt zusammengezogen werden.

Und der Nutzen?

Und der Nutzen?

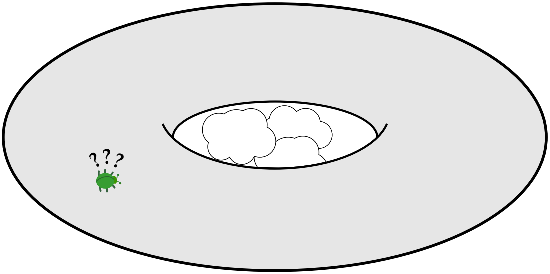
- Stellen wir uns vor, ein kleiner Käfer lebt auf einem Torus.

Und der Nutzen?

- Stellen wir uns vor, ein kleiner Käfer lebt auf einem Torus.
- Kann der Käfer herausfinden, dass er *nicht* auf einer Sphäre lebt?

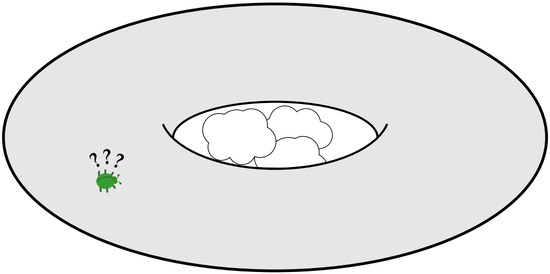
Und der Nutzen?

- Stellen wir uns vor, ein kleiner Käfer lebt auf einem Torus.
- Kann der Käfer herausfinden, dass er *nicht* auf einer Sphäre lebt?
- Selbst wenn er das Loch in der Mitte nicht sehen kann?



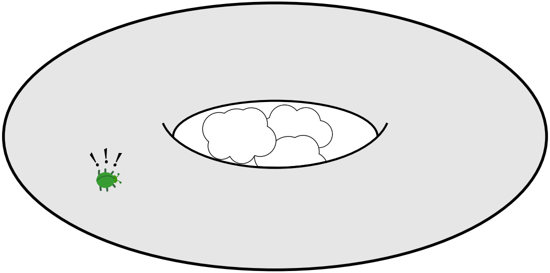
Und der Nutzen?

- Stellen wir uns vor, ein kleiner Käfer lebt auf einem Torus.
- Kann der Käfer herausfinden, dass er *nicht* auf einer Sphäre lebt?
- Selbst wenn er das Loch in der Mitte nicht sehen kann?
- Ja! Denn der Käfer kann überprüfen, ob seine Welt einfach zusammenhängend ist.



Und der Nutzen?

- Stellen wir uns vor, ein kleiner Käfer lebt auf einem Torus.
- Kann der Käfer herausfinden, dass er *nicht* auf einer Sphäre lebt?
- Selbst wenn er das Loch in der Mitte nicht sehen kann?
- Ja! Denn der Käfer kann überprüfen, ob seine Welt einfach zusammenhängend ist.
- Da der Torus nicht einfach zusammenhängend ist, weiß der Käfer, dass er nicht auf einer Sphäre lebt!



Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

- Eine *kompakte* Mannigfaltigkeit dehnt sich nicht unendlich weit aus.

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

- Eine *kompakte* Mannigfaltigkeit dehnt sich nicht unendlich weit aus.
- Eine Mannigfaltigkeit *ohne Rand* hat keine “Kante”, an der die Mannigfaltigkeit aufhört.

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

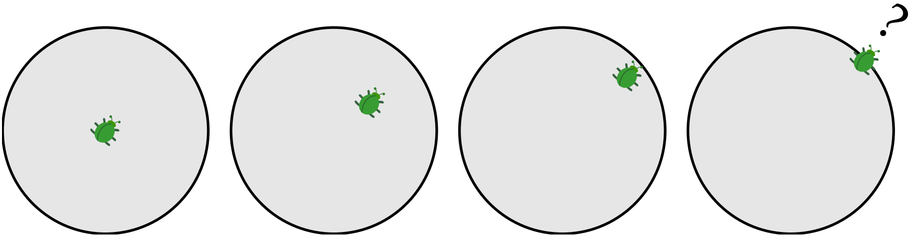
- Eine *kompakte* Mannigfaltigkeit dehnt sich nicht unendlich weit aus.
- Eine Mannigfaltigkeit *ohne Rand* hat keine “Kante”, an der die Mannigfaltigkeit aufhört.
- Kurz gesagt: Geschlossen = kompakt + ohne Rand

Beispiele!

- Die $\{1, 2, 3\}$-Sphäre sowie der Torus sind *kompakt* und *ohne Rand*, also *geschlossen*.

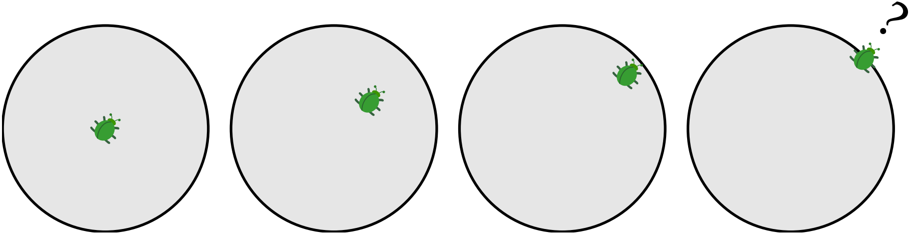
Beispiele!

- Die $\{1, 2, 3\}$-Sphäre sowie der Torus sind *kompakt* und *ohne Rand*, also *geschlossen*.
- Wenn wir zur $\{1, 2, 3\}$-Sphäre noch die inneren Punkte dazunehmen, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit *mit Rand*.



Beispiele!

- Die $\{1,2,3\}$-Sphäre sowie der Torus sind *kompakt* und *ohne Rand*, also *geschlossen*.
- Wenn wir zur $\{1,2,3\}$-Sphäre noch die inneren Punkte dazunehmen, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit *mit Rand*.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sind keine *kompakten* Mannigfaltigkeiten, da sie sich unendlich weit ausdehnen.



Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

- Griechisch: "homöo-" = "gleichartig"; "morph" = "Gestalt"

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

- Griechisch: "homöo-" = "gleichartig"; "morph" = "Gestalt"
- Zwei Objekte sind homöomorph, wenn sie durch Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren in einander überführt werden können.

Zurück zur Vermutung

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

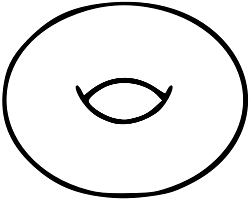
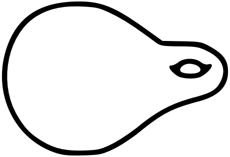
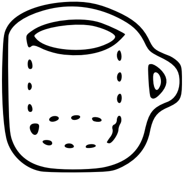
- Griechisch: “homöo-” = “gleichartig”; “morph” = “Gestalt”
- Zwei Objekte sind homöomorph, wenn sie durch Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren in einander überführt werden können.
- Es ist nicht erlaubt, die Objekte zu zerschneiden.

Beispiel

Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.

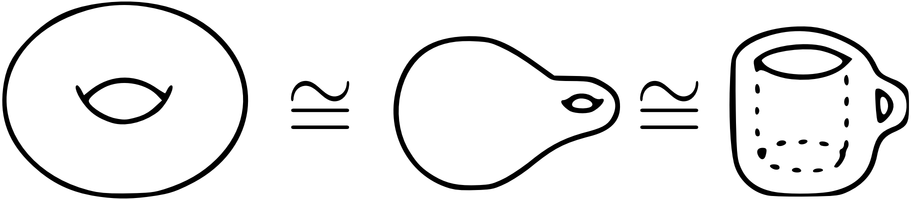
Beispiel

Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.

 $\cong$  $\cong$ 

Beispiel

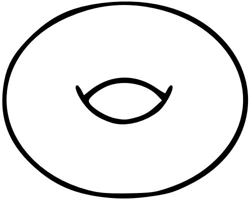
Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.



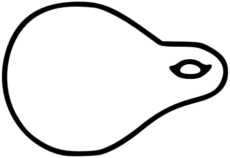
Vorstellung:

Beispiel

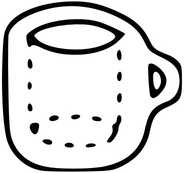
Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.



$\cong$



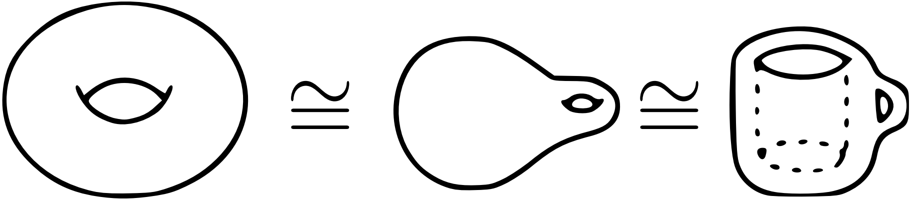
$\cong$



Vorstellung:

Beispiel

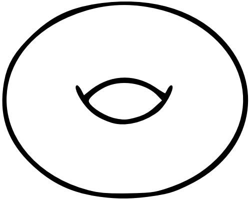
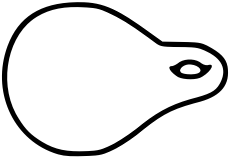
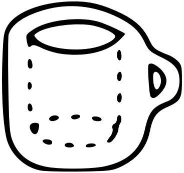
Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.



Vorstellung:

Beispiel

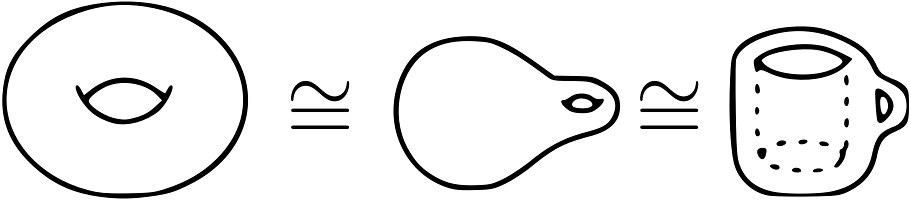
Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.

 $\cong$  $\cong$ 

Vorstellung:

Beispiel

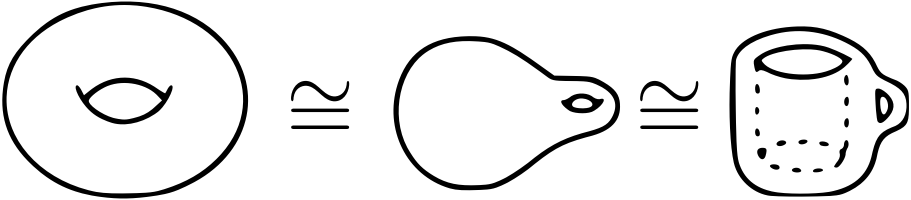
Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.



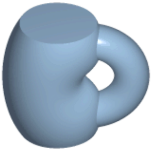
Vorstellung:

Beispiel

Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.

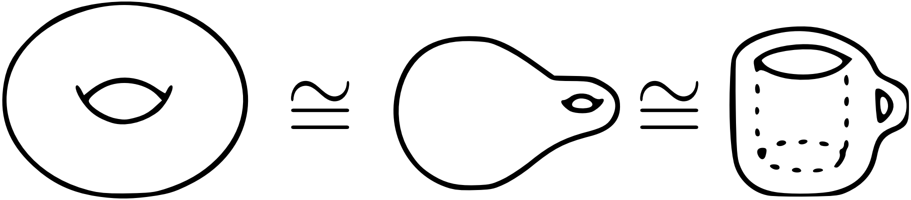


Vorstellung:

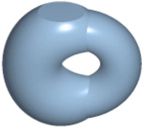


Beispiel

Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.

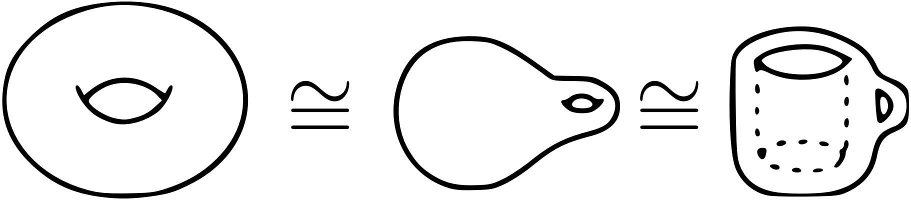


Vorstellung:

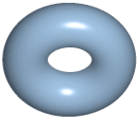


Beispiel

Topologen sind Menschen, die einen Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden können.



Vorstellung:



Am Ziel!

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Am Ziel!

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Mit anderen Worten: Angenommen, wir haben eine Mannigfaltigkeit. Wenn diese. . .

Am Ziel!

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Mit anderen Worten: Angenommen, wir haben eine Mannigfaltigkeit. Wenn diese. . .

- einfach zusammenhängend

Am Ziel!

> *Jede <u>einfach zusammenhängende</u> <u>geschlossene</u> <u>3-Mannigfaltigkeit</u> ist <u>homöomorph</u> zur <u>3-Sphäre</u>.*

Mit anderen Worten: Angenommen, wir haben eine Mannigfaltigkeit. Wenn diese...

- einfach zusammenhängend
- geschlossen

Am Ziel!

> *Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.*

Mit anderen Worten: Angenommen, wir haben eine Mannigfaltigkeit. Wenn diese...

- einfach zusammenhängend
- geschlossen
- 3-dimensional ist

Am Ziel!

Jede einfach zusammenhängende geschlossene 3-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

Mit anderen Worten: Angenommen, wir haben eine Mannigfaltigkeit. Wenn diese...

- einfach zusammenhängend
- geschlossen
- 3-dimensional ist

... dann *muss* es sich um die 3-Sphäre handeln (egal, wie kompliziert sie aussieht oder beschrieben wurde)!

Wozu ist es gut?

Wozu ist es gut?

- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: Das Universum ist eine 3-Mannigfaltigkeit.

Wozu ist es gut?

- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: Das Universum ist eine 3-Mannigfaltigkeit.
- Noch ungeklärt: Ist das Universum geschlossen?

Wozu ist es gut?

- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: Das Universum ist eine 3-Mannigfaltigkeit.
- Noch ungeklärt: Ist das Universum geschlossen?
- Falls ja, so macht die Poincaré-Vermutung eine Aussage über die Struktur unseres Universums!

Wozu ist es gut?

- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: Das Universum ist eine 3-Mannigfaltigkeit.
- Noch ungeklärt: Ist das Universum geschlossen?
- Falls ja, so macht die Poincaré-Vermutung eine Aussage über die Struktur unseres Universums!
- Müssen "nur" noch klären, ob das Universum einfach zusammenhängend ist.

Wozu ist es gut?

- Gegenwärtige Annahme in Astrophysik: Das Universum ist eine 3-Mannigfaltigkeit.
- Noch ungeklärt: Ist das Universum geschlossen?
- Falls ja, so macht die Poincaré-Vermutung eine Aussage über die Struktur unseres Universums!
- Müssen "nur" noch klären, ob das Universum einfach zusammenhängend ist.
- Falls ja, so leben wir in einer 3-Sphäre!

Weitere Konsequenzen

Weitere Konsequenzen

- Perelman hat “beiläufig” große Gebiete der Mathematik revolutioniert.

Weitere Konsequenzen

- Perelman hat “beiläufig” große Gebiete der Mathematik revolutioniert.
- Seine Arbeit setzt neue Impulse für die Forschung der nächsten *Jahrzehnte*!

Weitere Konsequenzen

- Perelman hat “beiläufig” große Gebiete der Mathematik revolutioniert.
- Seine Arbeit setzt neue Impulse für die Forschung der nächsten *Jahrzehnte*!
- Physiker haben Poincaré-Vermutung für 2 Dimensionen für String-Theorie und allgemeine Relativitätstheorie genutzt.

Weitere Konsequenzen

- Perelman hat "beiläufig" große Gebiete der Mathematik revolutioniert.
- Seine Arbeit setzt neue Impulse für die Forschung der nächsten *Jahrzehnte*!
- Physiker haben Poincaré-Vermutung für 2 Dimensionen für String-Theorie und allgemeine Relativitätstheorie genutzt.
- Als Resultat haben wir Technologien wie GPS, Handys, Raumsonden…

Weitere Konsequenzen

- Perelman hat "beiläufig" große Gebiete der Mathematik revolutioniert.
- Seine Arbeit setzt neue Impulse für die Forschung der nächsten *Jahrzehnte*!
- Physiker haben Poincaré-Vermutung für 2 Dimensionen für String-Theorie und allgemeine Relativitätstheorie genutzt.
- Als Resultat haben wir Technologien wie GPS, Handys, Raumsonden...
- Was wird sich also noch alles aus der Poincaré-Vermutung für 3 Dimensionen ergeben?

Zum Schluss

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

David Hilbert

Lust auf mehr?

- Donal O'Shea. *Poincarés Vermutung: Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers*, ISBN 978-3596176632.
- George G. Szpiro. *Das Poincaré-Abenteuer: Ein mathematisches Welträtsel wird gelöst*, ISBN 978-3492257251.
- Tina S. Chang. *Perelman's song*, Math Horizons, Vol. 15, No. 3, S. 22–24.
- Jeff Weeks. http://www.geometrygames.org/